Лекция 13_ Екі айналмалы дене есебіндегі меншікті айналу туралы

Өткен лекцияда біз сынақ денесінің меншікті айналуы бар орталық дененің гравитациялық өрісінде ілгерілемелі қозғалысы туралы мәселені талқыладық. Оның айналмалы қозғалысы туралы не айтсақ болады?

Бұл сұраққа жауап беруді айналу импульсін анықтау арқылы немесе сынақ денесінің меншікті бұрыштық моментін анықтаудан бастайық. $\vec{S}$ ті ілгерімелі импульспен $\vec{p} = \partial L / \partial \vec{v}$ ұқсастық арқылы анықтауға мүмкіндігіміз бар

$$\vec{S} = \frac{\partial L}{\partial \vec{\omega}}. \tag{1}$$

Сонда лагранжианнан $\vec{\omega}$ қатысты векторлық туындыны аламыз

$$\vec{S} = J\left(1 + \frac{3v^2}{2c^2} + \frac{8U}{3c^2}\right)\vec{\omega} - \frac{J}{c^2}\left[\frac{(\vec{\omega}\vec{v})}{2}\vec{v} + \frac{3\gamma m_0}{2mr^3}\vec{M} + 2\mathrm{rot}\vec{U}\right]. \tag{2}$$

Мұнда біз мынадай формуланы қолданамыз

$$\xi = \frac{2}{3}\varepsilon + \frac{8}{3}T. \tag{3}$$

Әрине, айналу моменті $\vec{S}$ (жалпыланған айналу импульсі) тек $\vec{\omega}$ пропорционалды ғана емес, сонымен қатар $\vec{v}$, $\vec{M}$, $\vec{S}_0$ және $\vec{r}$ -ге пропорционал терминдерді қамтиды, өйткені

$$\mathrm{rot}\vec{U} = \frac{\gamma}{2}\left(-\frac{\vec{S}_0}{r^3} + \frac{3\vec{r}\left(\vec{r}\vec{S}_0\right)}{r^5}\right). \tag{4}$$

Осы орайда, $\vec{p}$ ілгерімелі импульспен белгілі бір ұқсастық бар. Сонымен қатар, ілгерімелі импульсте тек $\vec{v}$ пропорционал мүше ғана емес, сонымен қатар $\vec{\omega}$, $\left[\vec{S}\vec{r}\right]$ және $\left[\vec{S}_0\vec{r}\right]$, пропорционал мүшелер де бар. Егер уақыттың бастапқы моментінде болса $\omega = 0$, онда (2)-ден мынандай шығады

$$\vec{S} = -\frac{J}{c^2}\left(\frac{3\gamma m_0}{2mr^3}\vec{M} + 2\mathrm{rot}\vec{U}\right). \tag{5}$$

Бұрыштық жылдамдығы бар индукцияланған айналу пайда болғандай эффект бар сияқты

$$\vec{\omega}_{ин} = -\frac{3\gamma m_0}{2mc^2 r^3}\vec{M} - \frac{2}{c^2}\mathrm{rot}\vec{U}. \tag{6}$$

(6) өрнек алдыңғы лекцияда келтірілген идеяларды растайды.

Енді вектордың уақыт бойынша өзгеруінің теңдеулерінің түрін қалай табуға болады? Бұл мәселені түсіну үшін біз қарастырып отырған өзіндік айналуы бар екі дене есебінің бастапқы Гамильтонианын жазамыз

$$H = mc^2 + \frac{p^2}{2m} + \frac{S^2}{2J} - mU - \frac{1}{c^2}\left\{\frac{p^4}{8m^3} + \left(\frac{\varepsilon}{3} + \frac{3T}{2}\right)\frac{p^2}{m^2} - \frac{1}{4m^2}\left(\vec{S}\vec{p}\right)\left(\vec{\omega}\vec{p}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{3p^2}{2m}U + \left(\frac{\xi_0}{m_0} + \frac{\xi}{m}\right)mU - \frac{mU^2}{2}\right\} - \frac{\gamma}{2mc^2}\left(\left[\left(3m_0\vec{S} + 4m\vec{S}_0\right)\vec{\nabla}\frac{1}{r}\right]\vec{p}\right) -$$

$$-\frac{\gamma}{c^2}\left(\left[\vec{S}\vec{\nabla}\right]\left[\vec{S}_0\vec{\nabla}\frac{1}{r}\right]\right) - \frac{2\gamma m}{7m_0c^2}\left(\left[\vec{S}_0\vec{\nabla}\right]\left[\vec{S}_0\vec{\nabla}\frac{1}{r}\right]\right). \tag{7}$$

Енді $\vec{S}$ векторды өзгертуге арналған теңдеудің жалпы түрі келесідей болуы керек екенін атап өту керек

$$\frac{d\vec{S}}{dt} = \frac{dS}{dt}\vec{e}_S + \left[\vec{\Omega}_S\vec{S}\right]. \tag{8}$$

Енді $\frac{dS}{dt}$ және $\vec{\Omega}_S$ анықтаймыз. Осы кезде $\vec{M}$ және $\vec{S}$ арасында ұқсастық жасауға болады, сондай ақ, $\vec{M}$ векторлық элементтің зерттеу кезінде алынған нәтижелерді де қолдануға болады. Шынында да, Гамильтониан (7) айналу координаталарына анық тәуелді емес болғандықтан

$$\frac{dS}{dt} = 0. \tag{9}$$

$\vec{\Omega}_S$ өрнегіне тоқталсақ

$$\vec{\Omega}_S = \frac{\partial H}{\partial \vec{S}}. \tag{10}$$

Сонымен, сынақ денесінің айналмалы қозғалысының теңдеуі

$$\frac{d\vec{S}}{dt} = \left[\vec{\Omega}_S\vec{S}\right]. \tag{11}$$

Сондай ақ, (11) теңдеуін төмендегіше жазамыз

$$\frac{d\vec{S}}{dt} = [\vec{\omega}\vec{S}]. \tag{12}$$

Брумбергтің [12, с. 311] еңбегінде айналмалы қозғалысының теңдеуі алынған болатын. Осы теңдеуді біз есебімізге қолдансақ

$$\frac{d\vec{S}}{dt} = [\vec{\omega}\vec{S}], \tag{13}$$

мұндағы

$$\vec{S} = J\left(1 + \frac{v^2}{2c^2} + \frac{3U}{c^2}\right)\vec{\omega} + \frac{J}{c^2}\left[\frac{1}{2}[\vec{v}[\vec{\omega}\vec{v}]] - \frac{3\gamma m_0}{2r^3}[\vec{r}\vec{v}] - \frac{\gamma}{r^5}\left(3\vec{r}(\vec{r}\vec{S}_0) - r^2\vec{S}_0\right)\right]. \tag{14}$$

(2) және (13) өрнектерді салыстыра отырып, бұл алынған нәтижелер әртүрлі жолмен алынғанмен Брумбергтің нәтижесімен сәйкес келеді. Бұл қорытындыға сонымен қатар, егер (2) өрнегін мына түрге келтіріп көз жеткізуге болады

$$\vec{S} = J\left(1 + \frac{v^2}{c^2} + \frac{8U}{3c^2}\right)\vec{\omega} + \frac{J}{c^2}\left[\frac{1}{2}[\vec{v}[\vec{\omega}\vec{v}]] - \frac{3\gamma m_0}{2mr^3}\vec{M} - 2\,\mathrm{rot}\vec{U}\right]. \tag{15}$$

Ал (14) және (15) өрнегінің оң жағындағы алғашқы мүшелердің арасындағы айырмашылықты денелердің ішкі құрылымын ескеруден пайда болған. Сынақ денелерінің айналмалы қозғалысының орташаланған теңдеулеріне оралатын болсақ

$$\bar{L} = mc^2 - \frac{m\alpha^2}{2M_0{}^2} + T - \frac{1}{c^2}\left\{\left(\frac{15m\alpha^2}{8M_0{}^2} - \varepsilon - \frac{25}{6}T - \frac{m}{m_0}\xi\right)\frac{\alpha^2}{M_0{}^2} + \right.$$

$$+ \frac{J\alpha^2}{4M_0{}^2\left(1 + \frac{M}{M_0}\right)}\left((\vec{\omega}\vec{e}_A)^2 + \frac{M}{M_0}(\vec{\omega}\vec{e}_p)^2\right) - \frac{3m\alpha^4}{MM_0{}^3} +$$

$$\left. + \frac{m^2\alpha^4}{m_0 M_0{}^3 M^3}\left[2(\vec{S}_0\vec{M}) + \frac{3m_0}{2m}(\vec{S}\vec{M}) + \frac{1}{2}(\vec{S}^*\vec{S}_0) - \frac{3}{2M^2}(\vec{S}^*\vec{M})(\vec{S}_0\vec{M})\right]\right\}. \tag{16}$$

Ескеретін жағдай

$$\vec{S}^{*} = \vec{S} + \frac{2m}{7m_0}\vec{S}_0. \tag{17}$$

сонда

$$\vec{S} = \frac{\partial \overline{L}}{\partial \vec{\omega}} = \left(1 + \frac{25\alpha^2}{6{M_0}^2 c^2}\right) J\vec{\omega} - \frac{J}{c^2}\left\{\frac{\alpha^2}{2M_0(M_0+M)}\left((\vec{\omega}\vec{e}_A)\vec{e}_A + \frac{M}{M_0}(\vec{\omega}\vec{e}_p)\vec{e}_p\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{m^2\alpha^4}{m_0 {M_0}^3 M^3}\left[\frac{3m_0}{2m}\vec{M} + \frac{\vec{S}_0}{2} - \frac{3}{2}(\vec{S}_0\vec{e}_M)\vec{e}_M\right]\right\}. \tag{18}$$

Орташаланған айналмалы қозғалыс теңдеуін жазамыз

$$\frac{d\vec{S}}{dt} = \left[\overline{\vec{\Omega}_S}\vec{S}\right], \tag{19}$$

мұндағы

$$\overline{\vec{\Omega}_S} = \frac{1}{S}\frac{\partial \overline{H}}{\partial \vec{e}_S} = \frac{\alpha^2}{2M_0(M_0+M)c^2}\left((\vec{\omega}\vec{e}_A)\vec{e}_A + \frac{M}{M_0}(\vec{\omega}\vec{e}_p)\vec{e}_p\right) +$$

$$+ \frac{m^2\alpha^4}{m_0 {M_0}^3 M^3}\left[\frac{3m_0}{2m}\vec{M} + \frac{\vec{S}_0}{2} - \frac{3}{2}(\vec{S}_0\vec{e}_M)\vec{e}_M\right]. \tag{20}$$

Қолданылған әдебиет

1. Абдильдин М. М. Проблема движения тел в общей теории относительности // – Алматы: Изд-во «Қазақ университеті», 2006. – 132 с.